Chapter II of Bertrand Russell's *Introduction to Mathematical Philosophy*
Translated into Bangla by Arif Afsar

সংখ্যার সংজ্ঞা

বার্ট্রান্ড রাসেল
অনুবাদ: আরিফ আফসার

সংখ্যা কী ? – প্রশ্নটা বারবার উত্থাপিত হলেও কেবল আমাদের যুগেই সঠিকভাবে এর উত্তর দেয়া হয়েছে। উত্তরটা আসে ফ্রেগে-র কাছ থেকে, ১৮৮৪ সালে তার *Grundlagen der Arithmetik*[১] গ্রন্থে। খুব সংক্ষিপ্ত, সহজ, এবং সর্বোচ্চ-গুরু ত্ববাহী হওয়া সত্ত্বেও বইটি কোন মনযোগই প্রায় আকর্ষণ করে নি, এবং এটি সংখ্যার যে-সংজ্ঞাটি ধারণ করে, ১৯০১ সালে বর্তমান গ্রন্থকার কর্তৃক পুনরাবিস্কৃত হওয়ার পূর্ব পর্যন্ত তা কার্যত অজানাই থেকে যায়।

সংখ্যার একটা সংজ্ঞা খোঁজার সময়, প্রথমেই যে-বিষয়টি সম্পর্কে স্বচ্ছ হওয়া প্রয়োজন তাকে আমরা আমাদের অনুসন্ধানের ব্যাকরণ বলতে পারি। সংখ্যার সংজ্ঞা দিতে গিয়ে অনেক দার্শনিক প্রকৃতপক্ষে বহুত্ব-র সংজ্ঞা দিতে শুরু করেন, যা সম্পূর্ণ ভিন্ন জিনিস। *সংখ্যা* হচ্ছে সংখ্যার যা বৈশিষ্ট্য তাই, যেমন *মানুষ* হচ্ছে মানুষের যা বৈশিষ্ট্য তাই। একটা বহুত্ব সংখ্যার দৃষ্টান্ত নয়, বরং তা কোন নির্দিষ্ট সংখ্যার দৃষ্টান্ত। উদাহরণস্বরূপ, মানুষের একটা ত্রয়ী হচ্ছে ৩ সংখ্যাটার দৃষ্টান্ত, এবং ৩ সংখ্যাটা হচ্ছে সংখ্যার দৃষ্টান্ত; কিন্তু ত্রয়ীটা সংখ্যার একটা দৃষ্টান্ত নয়। এ বিষয়টি খুব মামুলি আর অনুল্লেখযোগ্য মনে হতে পারে; কিন্তু তা খুব সূক্ষ্ম বলেই প্রতীয়মান হয়েছে দার্শনিকদের কাছে, অল্পসংখ্যক ব্যতিক্রম সহ।

একটা নির্দিষ্ট সংখ্যা পদসমূহের কোন সংগ্রহের সাথে, যে-সংগ্রহের সেই সংখ্যাটা আছে, অভেদাত্মক নয়: ৩ সংখ্যাটা ব্রাউন, জোনস এবং রবিনসন-এর ত্রয়ীর সাথে অভেদাত্মক নয়। ৩ সংখ্যাটা এমন কিছু যা সকল ত্রয়ীতে সাধারণ, এবং যা তাদেরকে অন্যান্য সংগ্রহ থেকে ভিন্নতা দেয়। একটা সংখ্যা হচ্ছে এমন কিছু যা নির্দিষ্ট কতকগুলো সংগ্রহকে, অর্থাৎ যাদের এই সংখ্যাটা আছে তাদেরকে, বৈশিষ্ট্যমণ্ডিত করে।

এখন থেকে আমরা একটা "সংগ্রহ"-র পরিবর্তে সাধারণত একটা "শ্রেণী" কিংবা একটা "সেট" সম্পর্কে আলোচনা করব। এই একই জিনিস নির্দেশ করতে অন্য যেসব শব্দ গণিতে ব্যবহৃত হয় তারা হচ্ছে "সমষ্টি" এবং "বহুধা"। শ্রেণী সম্পর্কে পরে অনেক কিছু আমাদের বলতে হবে। আপাতত আমরা যতটা সম্ভব কম বলব। তবে কয়েকটি বিষয়ে এখনই মন্তব্য করা প্রয়োজন।

একটা শ্রেণী বা সংগ্রহ দুই ভাবে সংজ্ঞায়িত হতে পারে, যারা প্রথম দর্শনে যথেষ্ট স্বতন্ত্র বলে প্রতীয়মান হয়। আমরা এর সদস্যদের গণনা করতে পারি, যেমন যখন আমরা বলি, "আমি যে সংগ্রহটার কথা বোঝাচ্ছি তা হল ব্রাউন, জোনস ও রবিনসন।" কিংবা আমরা কোন সংজ্ঞাসূচক বৈশিষ্ট্যের উল্লেখ করতে পারি, "মানবজাতি" বা "লন্ডনের অধিবাসী" বলার সময় আমরা যেমন করি। যে-সংজ্ঞায় গণনা করা হয় তাকে বলা হয় "বিস্তৃতি"-র সাহায্যে সংজ্ঞা, এবং যে-সংজ্ঞায় সংজ্ঞাসূচক বৈশিষ্ট্যের উল্লেখ করা হয় তাকে বলে "জাত্যর্থ"-র সাহায্যে সংজ্ঞা। এ দুই প্রকার সংজ্ঞার মধ্যে, জাত্যর্থের মাধ্যমে প্রদত্ত সংজ্ঞাই যৌক্তিক দিক দিয়ে অধিকতর মৌলিক। এটি দুই দিক দিয়ে সমর্থিত: (১) বিস্তৃতিমূলক সংজ্ঞা সব সময়ই জাত্যর্থমূলক সংজ্ঞায় রূপান্তরযোগ্য; (২) জাত্যর্থমূলক সংজ্ঞা কখনও কখনও এমন কি তাত্ত্বিকভাবেও বিস্তৃতিমূলক সংজ্ঞায় রূপান্তরযোগ্য নয়। এদের প্রত্যেকটিই ব্যাখ্যার দাবি রাখে।

(১) ব্রাউন, জোনস, এবং রবিনসন – এদের সবাই একটা নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের অধিকারী যা গোটা বিশ্বের অন্য কোন কিছুরই বৈশিষ্ট্য নয়, তা হচ্ছে: হয় ব্রাউন, নয় তো জোনস, নয় তো রবিনসন হওয়ার বৈশিষ্ট্য। ব্রাউন, জোনস ও রবিনসন-কে নিয়ে গঠিত শ্রেণীটির একটি জাত্যর্থমূলক সংজ্ঞা দেয়ার সময় এই বৈশিষ্ট্যটি ব্যবহার করা যেতে পারে। "x হয় ব্রাউন অথবা x হয় জোনস অথবা x হয় রবিনসন"-এর মত একটা সূত্র বিবেচনা করা যাক। এই সূত্রটি কেবল তিনটি x, যথা ব্রাউন এবং জোনস এবং রবিনসন-এর বেলায় সত্য হবে। এদিক দিয়ে এটি তিনটি মূলসমেত কোন ত্রিঘাত সমীকরণের সদৃশ। বিষয়টি গণ্য হতে পারে এই তিনজন মানুষ দ্বারা গঠিত শ্রেণীটির সদস্যদের প্রতি এমন একটা বৈশিষ্ট্য আরোপ করা

[১] একই উত্তর অধিকতর পূর্ণতা এবং উৎকর্ষের সাথে দেয়া হয়েছে তার *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. i., 1893-তে।

হিসেবে, যে-বৈশিষ্ট্যটা তাদের সবার মধ্যেই সাধারণ, এবং কেবল তাদের ক্ষেত্রেই সীমাবদ্ধ। বিস্তৃতির সাহায্যে ব্যক্ত অন্য যে-কোন শ্রেণীর বেলায়ই অনুরূপ ব্যবস্থা স্পষ্টত প্রযোজ্য।

(২) এটা স্পষ্ট যে, কখনও কখনও একটা শ্রেণীর সদস্যদের গণনা করতে সক্ষম না হলেও কার্যত আমরা শ্রেণীটি সম্পর্কে অনেক কিছু জানতে পারি। বস্তুত কোন মানুষের পক্ষেই সকল মানুষকে, কিংবা কেবল লন্ডনের অধিবাসীদেরকেও গণনা করা সম্ভব নয়, তথাপি এই শ্রেণীগুলোর প্রত্যেকটি সম্পর্কে অনেক কিছুই জ্ঞাত। একটা শ্রেণী সম্পর্কে জ্ঞানলাভের জন্য বিস্তৃতিমূলক সংজ্ঞা যে *অপরিহার্য* নয়, তা দেখানোর জন্য এতটুকুই যথেষ্ট। কিন্তু অসীম শ্রেণীসমূহের আলোচনায় অবতীর্ণ হলে আমরা দেখতে পাই, যেসব সত্তা শুধু সীমিত সময়ের জন্য অস্তিত্বশীল তাদের ক্ষেত্রে গণনা এমন কি তাত্ত্বিকভাবেও সম্ভব নয়। আমরা সকল স্বাভাবিক সংখ্যাকে গণনা করতে পারি না: তারা হচ্ছে ০, ১, ২, ৩, *ইত্যাদি*। কোন একটা জায়গায় এসে আমাদের "ইত্যাদি" নিয়ে সন্তুষ্ট থাকতে হবে। সকল ভগ্নাংশ কিংবা সকল অমূলদ সংখ্যা, কিংবা অন্য কোন অসীম সংগ্রহের সমগ্রটা আমরা গণনা করতে পারি না। সুতরাং এ ধরনের সকল সংগ্রহের ক্ষেত্রে আমাদের জ্ঞান শুধু জাত্যর্থ-নির্ভর সংজ্ঞা থেকেই আহরিত হতে পারে।

সংখ্যার সংজ্ঞা খোঁজার সময় তিনটি ভিন্ন দৃষ্টিকোণ থেকে এইসব মন্তব্য প্রাসঙ্গিক। প্রথমত, সংখ্যাসমূহ নিজেরা একটা অসীম সংগ্রহ গঠন করে, এবং সেইজন্য তারা গণনার মাধ্যমে সংজ্ঞায়িত হতে পারে না। দ্বিতীয়ত, নির্দিষ্টসংখ্যক পদ-বিশিষ্ট সংগ্রহসমূহ নিজেরা একটা অসীম সংগ্রহ গঠন করে বলে ধরে নেয়া হয়; উদাহরণস্বরূপ, এটা অনুমেয় যে, ত্রয়ীসমূহের একটা অসীম সংগ্রহ জগতে বিদ্যমান, কারণ বিষয়টি এমন না হলে জগতের মোট বস্তুর সংখ্যা সসীম হয়ে পড়ত, যা সম্ভব হলেও, অবিশ্বাস্য বলে মনে হয়। তৃতীয়ত, আমরা এমন ভাবে "সংখ্যা"-র সংজ্ঞা দিতে চাই যাতে অসীম সংখ্যাগুলো সম্ভব হয়; এতদনুসারে আমাদেরকে অবশ্যই একটা অসীম সংগ্রহের পদসমূহের সংখ্যা সম্পর্কে কথা বলতে সক্ষম হতে হবে, এবং এ ধরনের একটা সংগ্রহকে অবশ্যই জাত্যর্থ-র মাধ্যমে সংজ্ঞায়িত হতে হবে, অর্থাৎ এমন একটা বৈশিষ্ট্যের মাধ্যমে সংজ্ঞায়িত হতে হবে যা এর সকল সদস্যের মধ্যে সাধারণ এবং কেবল তাদের বেলায়ই প্রযোজ্য ।

অনেক প্রয়োজনের ক্ষেত্রেই, একটা শ্রেণীর সাথে একটা সংজ্ঞাসূচক বৈশিষ্ট্য কার্যত বিনিময়। এ দুয়ের মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য এই বাস্তবতায় নিহিত যে, নির্দিষ্টসংখ্যক সদস্যের শুধুমাত্র একটা শ্রেণী থাকতে পারে; কিন্তু পক্ষান্তরে, সর্বদাই একাধিক ভিন্ন বৈশিষ্ট্য দ্বারা একটি নির্দিষ্ট শ্রেণী সংজ্ঞায়িত হতে পারে। মানুষ সংজ্ঞায়িত হতে পারে পালকহীন দ্বিপদ হিসেবে, অথবা বুদ্ধিবৃত্তিসম্পন্ন প্রাণী হিসেবে, অথবা (আরও সঠিকভাবে) এমন প্রলক্ষণসমূহ দ্বারা যাদের সাহায্যে ইয়াহুদের বর্ণনা দিয়েছিলেন সুইফট। একটা সংজ্ঞাসূচক বৈশিষ্ট্যের কখনও অনন্য না হওয়ার বিষয়টিই শ্রেণীসমূহকে ব্যবহারের উপযোগী করে; অন্যভাবে, তাদের সদস্যদের মধ্যকার সাধারণ ও স্বাতন্ত্র্যসূচক বৈশিষ্ট্যসমূহ নিয়েই আমরা তৃপ্ত হতে পারি।[১] এই সব বৈশিষ্ট্যের যে-কোনটিই তার শ্রেণীটির পরিবর্তে ব্যবহৃত হতে পারে, অনন্যতা যখন গুরুত্বপূর্ণ নয়।

এখন সংখ্যার সংজ্ঞার বিষয়ে ফিরে আসা যাক; এটা স্পষ্ট যে, নির্দিষ্ট সংখ্যক পদ-বিশিষ্ট কিছু সংগ্রহের মধ্যে সম্বন্ধ স্থাপনের একটা উপায় হচ্ছে সংখ্যা। সকল যুগল একটা গুচ্ছে, সকল ত্রয়ী আরেকটাতে, এ ভাবে আমরা অনুমান করে যেতে পারি। এই পন্থায় আমরা সংগ্রহসমূহের বিভিন্ন গুচ্ছ অর্জন করি, নির্দিষ্টসংখ্যক পদ-বিশিষ্ট সকল সংগ্রহ নিয়ে প্রত্যেকটি গুচ্ছ গঠিত। প্রত্যেকটি গুচ্ছ হচ্ছে একেকটি শ্রেণী যাদের সদস্যরা হচ্ছে সংগ্রহ, অর্থাৎ শ্রেণী; এভাবে প্রত্যেক গুচ্ছ হচ্ছে শ্রেণীসমূহের শ্রেণী। উদাহরণস্বরূপ, সকল যুগলের গুচ্ছটা হচ্ছে শ্রেণীসমূহের একটা শ্রেণী: প্রত্যেক যুগল হচ্ছে দুই-সদস্যবিশিষ্ট একটা শ্রেণী, এবং যুগলসমূহের সমগ্র গুচ্ছটা হচ্ছে অসীমসংখ্যক সদস্যবিশিষ্ট একটা শ্রেণী, যাদের প্রত্যেকে দুই-সদস্যবিশিষ্ট একটা শ্রেণী।

কিভাবে আমরা সিদ্ধান্ত নেব দুইটি সংগ্রহ একই গুচ্ছের অন্তর্ভুক্ত কি না ? এর স্বতঃস্ফূর্ত উত্তরটা হচ্ছে: "তাদের প্রত্যেকের সদস্য-সংখ্যা নির্ণয় কর, এবং সদস্য-সংখ্যা সমান হলে তাদেরকে একই গুচ্ছের অন্তর্ভুক্ত কর।" এটা কিন্তু ধরে নেয় যে, আমরা সংখ্যাকে সংজ্ঞায়িত করেছি এবং একটা সংগ্রহের সদস্য-সংখ্যা কত তা খুঁজে বের করতে জানি। গণনাকর্মে আমরা এতটাই অভ্যস্ত যে, এ ধরনের একটা পূর্বানুমান খুব সহজেই আমাদের অলক্ষিত থেকে যেতে পারে। তা

[১] শ্রেণীসমূহ গণ্য হতে পারে, পরে যেভাবে তারা ব্যাখ্যাত হবে, সংজ্ঞাসূচক বৈশিষ্ট্যসমূহ দ্বারা গঠিত যৌক্তিক কল্পনা হিসেবে। তবে আপাতত এটা আমাদের বর্ণনাকে সহজ করবে যাতে করে শ্রেণীসমূহকে সত্য বলে ধরে নেয়া যায়।

সত্ত্বেও, যদিও স্বচ্ছন্দ, গণনাকর্ম আসলে যৌক্তিক দিক থেকে একটা খুব জটিল প্রক্রিয়া; তদুপরি, একটা সংগ্রহের কতগুলো সদস্য আছে তা আবিষ্কারের উপায় হিসেবে এটা তখনই লাভজনক যখন সংগ্রহটা সসীম। আমাদের সংখ্যার সংজ্ঞায় এটা অবশ্যই আগেভাগে ধরে নেয়া উচিত নয় যে, সব সংখ্যা সসীম; এবং একটা চক্রক দোষ ছাড়া, আমরা কোনভাবেই সংখ্যার সংজ্ঞা দেয়ার ক্ষেত্রে গণনা-কে ব্যবহার করতে পারি না, কারণ গণনার সময় সংখ্যা ব্যবহৃত হয়। কাজেই, দুইটি সংগ্রহের সদস্য-সংখ্যা কখন সমান, তা নির্ধারণের জন্য অন্য কোন পদ্ধতি আমাদের প্রয়োজন।

প্রকৃতপক্ষে, সংখ্যা কী তার সংজ্ঞা দেয়ার চাইতে, দুইটি সংগ্রহের সমান সংখ্যক পদ আছে কি না তা বের করা যৌক্তিক দিক দিয়ে সরলতর। একটা উদাহরণ দিলে তা স্বচ্ছ হবে। এটা স্পষ্ট যে, যদি পৃথিবীর কোথাও বহুপত্নীক কিংবা বহুভর্তৃক বিবাহ না থাকত তা হলে যে কোন সময়ে স্বামী আর স্ত্রী-র সংখ্যা হুবহু এক হত। এ সম্পর্কে নিশ্চিত হতে আমাদের কোন শুমারির প্রয়োজন নেই, কিংবা স্বামী বা স্ত্রী-র প্রকৃত সংখ্যাও জানার প্রয়োজন নেই। আমরা জানি সংখ্যাটা উভয় সংগ্রহের ক্ষেত্রে অবশ্যই এক হবে, কারণ প্রত্যেক স্বামীর একজন স্ত্রী এবং প্রত্যেক স্ত্রীর একজন স্বামী আছে। স্বামী ও স্ত্রীর সম্বন্ধটা হচ্ছে যাকে বলা হয় "এক-এক"।

x এবং y সম্বন্ধযুক্ত হলে, যদি অন্য কোন পদ x'-এর সাথে y-এর একই ধরনের সম্বন্ধ না থাকে, এবং x-এর সাথে y ছাড়া অন্য কোন পদ y'-এর একই ধরনের সম্বন্ধ না থাকে, তবে একটা সম্বন্ধকে "এক-এক" বলা হয়। যখন এই শর্ত দুটোর শুধু প্রথমটি পূরণ হয় তখন সম্বন্ধটাকে বলা হয় "এক-বহু", যখন শুধু দ্বিতীয়টি পূরণ হয়, একে বলা হয় "বহু-এক"। লক্ষ করা উচিত যে, এই সংজ্ঞাগুলোতে ১ সংখ্যাটি ব্যবহৃত হয় নি।

খ্রিস্টান দেশগুলোতে, স্বামী-স্ত্রী সম্বন্ধটা এক-এক; মুসলিম দেশগুলোতে তা এক-বহু; তিব্বতে তা বহু-এক। পিতা-পুত্র সম্বন্ধটা এক-বহু, পুত্র-পিতা সম্বন্ধটা বহু-এক, কিন্তু জ্যেষ্ঠপুত্র ও পিতার বেলায় তা এক-এক। যদি n কোন সংখ্যা হয়, n-এর সাথে $n+1$-এর সম্বন্ধ হচ্ছে এক-এক; n-এর সাথে $2n$ কিংবা $3n$- এর সম্বন্ধও অনুরূপ। যখন আমরা শুধু ধনাত্মক সংখ্যাগুলোকে বিবেচনা করব, n-এর সাথে n^2-এর সম্বন্ধ এক-এক; কিন্তু যখন ঋণাত্মক সংখ্যাগুলোকে গ্রাহ্য করা হবে, এটা হয়ে যাবে দুই-এক, যেহেতু n এবং $-n$-এর বর্গটা একই। এক-এক, এক-বহু, এবং বহু-এক সম্বন্ধগুলোর ধারণা স্বচ্ছ করতে এইসব দৃষ্টান্ত যথেষ্ট বলে বিবেচিত হওয়া বাঞ্ছনীয়; এরা গণিতের তত্ত্বসমূহে একটা গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা রাখে, শুধু সংখ্যার সংজ্ঞা নির্ণয়ের ক্ষেত্রেই নয়, অন্য অনেক বিষয়েও।

দুইটি শ্রেণীকে তখনই "সদৃশ" বলা হয় যখন তাদের মধ্যে একটা এক-এক সম্বন্ধ বিদ্যমান যা তাদের একটি শ্রেণীর প্রতিটি পদ-কে অপর শ্রেণীটির একটি পদের সাথে সম্পর্কযুক্ত করে, ঠিক যেভাবে বৈবাহিক সম্পর্ক স্বামীদের সাথে স্ত্রীদের সম্বন্ধ স্থাপন করে। স্বল্পসংখ্যক প্রাথমিক সংজ্ঞা এই সংজ্ঞাটাকে আরও স্পষ্টভাবে বুঝতে আমাদের সহায়ক হবে। যে-শ্রেণীটির পদগুলোর কোন-না-কোন কিছুর সাথে নির্দিষ্ট সম্বন্ধ আছে তাকে সেই সম্বন্ধটার *এলাকা* বলা হয়; তদনুসারে পিতারা হচ্ছে পিতা-সন্তান সম্বন্ধটার এলাকা, স্বামীরা হচ্ছে স্বামী-স্ত্রী সম্বন্ধটার এলাকা, স্ত্রীরা হচ্ছে স্ত্রী-স্বামী সম্বন্ধটার এলাকা, এবং স্বামীরা এবং স্ত্রীরা একত্রে বিবাহ সম্বন্ধটার এলাকা। স্ত্রী-স্বামী সম্বন্ধটাকে স্বামী-স্ত্রী সম্বন্ধটার *বিপরীত* বলা হয়। অনুরূপভাবে, *ক্ষুদ্রতর* হচ্ছে *বৃহত্তর*-র বিপরীত, *পরবর্তী* হচ্ছে *পূর্ববর্তী*-র বিপরীত, ইত্যাদি। সর্বজনীনভাবে, একটা প্রদত্ত সম্বন্ধের বিপরীত হচ্ছে সেই সম্বন্ধ যা y এবং x-এর মধ্যে বিদ্যমান, যখন প্রদত্ত সম্বন্ধটা x এবং y-এর মধ্যে বিদ্যমান। একটা সম্বন্ধের *বিপরীত এলাকা* হচ্ছে এর বিপরীতের এলাকা: তদনুসারে স্ত্রী শ্রেণীটা হচ্ছে স্বামী-স্ত্রী সম্বন্ধটার বিপরীত এলাকা। আমাদের সাদৃশ্য-র সংজ্ঞাটা এখন আমরা এভাবে ব্যক্ত করতে পারি :-

একটি শ্রেণীকে অন্য একটির "সদৃশ" বলা হয় যখন এমন একটা এক-এক সম্বন্ধ বিদ্যমান যার এলাকা হচ্ছে এই শ্রেণীটি, এবং বিপরীত এলাকা হচ্ছে অপর শ্রেণীটি।

এটা প্রমাণ করা সহজ যে, (১) প্রত্যেক শ্রেণী তার নিজের সদৃশ, (২) যদি একটা শ্রেণী α একটা শ্রেণী β-র সদৃশ হয়, তবে β হবে α-র সদৃশ, (৩) α যদি β-র সদৃশ হয় এবং β যদি γ-র সদৃশ হয়, তবে α হবে γ-র সদৃশ। একটা সম্বন্ধ এই বৈশিষ্ট্যগুলোর প্রথমটা ধারণ করলে তাকে বলা হয় *আত্মবাচক*, দ্বিতীয়টা ধারণ করলে *প্রতিসম*, এবং তৃতীয়টা ধারণ করলে *স্থানান্তরযোগ্য*। এটা স্পষ্ট যে, একটা প্রতিসম ও স্থানান্তরযোগ্য সম্বন্ধ অবশ্যই এর এলাকার সর্বত্র

আত্মবাচক হবে। যেসব সম্বন্ধ এই বৈশিষ্ট্যগুলো ধারণ করে তারা গুরু ত্বপূর্ণ ধরনের, এবং উল্লেখ করা জরু রী যে, সাদৃশ্য হচ্ছে এই ধরনের সম্বন্ধগুলোর একটি।

কাণ্ডজ্ঞানের কাছে এটা স্পষ্ট যে, দুইটি সসীম শ্রেণীর সমানসংখ্যক পদ থাকবে যদি তারা সদৃশ হয়, নতুবা নয়। গণনাকৃত বস্তুর সেট এবং গণনাকর্মে ব্যবহৃত স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের (০ ব্যতীত) মধ্যে একটা এক-এক সম্পর্ক স্থাপনের মধ্যেই গণনা করার কর্মটি নিহিত। ফলে কাণ্ডজ্ঞানের সিদ্ধান্ত হচ্ছে, যে-সেটটি গণনা করা হচ্ছে তাতে ততটিই বস্তু আছে, গণনায় ব্যবহৃত শেষ সংখ্যাটি পর্যন্ত যতগুলো সংখ্যা আছে। এবং আমরা এটাও জানি যে, যতক্ষণ আমরা নিজেদের সসীম সংখ্যায় আবদ্ধ রাখব, ১ থেকে n পর্যন্ত ঠিক n-সংখ্যক সংখ্যা থাকবে। কাজেই এ থেকে অনুমিত হয় যে, কোন সংগ্রহের গণনায় ব্যবহৃত শেষ সংখ্যাটা যত, সংগ্রহটাতে পদের সংখ্যাও তত, যদি সংগ্রহটা সসীম হয়। কিন্তু এই ফলাফল, শুধু সসীম সংগ্রহের বেলায় প্রযোজ্য হওয়ার পাশাপাশি, এই সত্যটার উপর নির্ভর করে এবং তা পূর্বানুমান করে যে, দুইটি শ্রেণী সদৃশ হলে তাদের সমান সংখ্যক পদ থাকবে; কারণ (ধরা যাক) ১০টি বস্তু গণনা করার সময় আমরা যা করি তা হচ্ছে এটা দেখানো যে, এই বস্তুগুলোর সেটটি ১ থেকে ১০ পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর সেটের সদৃশ। সাদৃশ্যের ধারণাটা গণনাকর্মের মধ্যে যৌক্তিকভাবে পূর্বানুমিত থাকে, এবং অপেক্ষাকৃত কম স্বচ্ছন্দ হলেও তা যৌক্তিকভাবে সরলতর। গণনার বেলায় গণনাকৃত বস্তুগুলোকে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ইত্যাদির মত একটা নির্দিষ্ট ক্রম হিসেবে গ্রহণ করা আবশ্যক, কিন্তু ক্রম সংখ্যার সত্তাসারের কোন ব্যাপার নয়: এটা একটা অপ্রাসঙ্গিক সংযোজন, যৌক্তিক দৃষ্টিকোণ থেকে দেখলে একটা অনাবশ্যক জটিলতা। সাদৃশ্যের ধারণা কোন ক্রম দাবি করে না; উদাহরণস্বরূপ, আমরা দেখেছি যে, স্বামী এবং স্ত্রীর সংখ্যা সমান, এবং এর জন্য তাদের মধ্যে কোন অগ্রাধিকারভিত্তিক ক্রম প্রতিষ্ঠা করতে হয় নি। সাদৃশ্যের ধারণাটা এটাও দাবি করে না যে, সদৃশ শ্রেণীগুলো সসীম হবে। উদাহরণস্বরূপ, এক দিকে স্বাভাবিক সংখ্যা (০ ব্যতীত) এবং অন্যদিকে সেইসব ভগ্নাংশ নেয়া যাক যাদের হর ১ : এটা স্পষ্ট যে, আমরা ২-এর সাথে $\frac{১}{২}$-কে, ৩-এর সাথে $\frac{১}{৩}$-কে সম্পর্কযুক্ত করতে পারি এবং এভাবে অগ্রসর হয়ে প্রমাণ করতে পারি শ্রেণী দুটো সদৃর্শ।

কাজেই, কখন দুইটি সংগ্রহকে একই গুচ্ছের অন্তর্ভুক্ত করতে হবে, পূর্বে এই অধ্যায়ে যে-অর্থে আমরা প্রশ্নটি উঠিয়েছিলাম, তা নির্ধারণের জন্য আমরা সাদৃশ্যের ধারণাটিকে ব্যবহার কতে পারি। আমরা একটা গুচ্ছ গঠন করতে চাই যা সেই শ্রেণীটাকে ধারণ করবে যার কোন সদস্য নেই: এটা হবে ০ সংখ্যাটার জন্য। তারপর, যে-সব শ্রেণীর একজন করে সদস্য, তাদের সবাইকে ধারণকারী একটা গুচ্ছ চাই: এটা হবে ১ সংখ্যাটার জন্য। তারপর, ২ সংখ্যাটার জন্য সকল যুগলকে ধারণকারী একটা গুচ্ছ আমরা চাই; তারপর সকল ত্রয়ীকে ধারণকারী একটা; ইত্যাদি। যে-কোন প্রদত্ত সংগ্রহের বেলায়, এটা যে-গুচ্ছের অন্তর্ভুক্ত হওয়া উচিত তাকে আমরা সংজ্ঞায়িত করতে পারি সেইসব সংগ্রহের শ্রেণী হিসেবে যারা এর সদৃশ। এটা খুব সহজেই বোঝা যায় যে, যদি (উদাহরণস্বরূপ) কোন সংগ্রহের তিনটি সদস্য থাকে, তবে এর সদৃশ সকল সংগ্রহকে ধারণ করে যে-শ্রেণীটি তা হবে ত্রয়ীর শ্রেণী। এবং একটা শ্রেণীর পদসংখ্যা যাই হোক, এর "সদৃশ" সকল শ্রেণীর পদসংখ্যা ঠিক তাই হবে। একে আমরা "সমান সংখ্যক পদ থাকা"-র *সংজ্ঞা* হিসেবে গ্রহণ করতে পারি। স্পষ্টতই, যতক্ষণ আমরা সসীম সংগ্রহের প্রসঙ্গে নিজেদের আবদ্ধ রাখি ততক্ষণ এটা প্রয়োগ-উপযোগী ফলাফল প্রদান করে ।

এখন পর্যন্ত আমরা এমন কিছুরই অবতারণা করি নি যা ন্যূনতম মাত্রায়ও কূটাভাসপূর্ণ। কিন্তু যখন আমরা সংখ্যার প্রকৃত সংজ্ঞা দিতে যাব তখন তাকে এড়াতে পারব না যাকে অবশ্যই প্রথম দর্শনে কূটাভাসপূর্ণ মনে হবে, যদিও এই ধারণা শীঘ্রই অপসৃত হবে। স্বভাবতই আমরা মনে করি যে, যুগলের শ্রেণীটা (উদাহরণস্বরূপ) ২ সংখ্যাটা থেকে ভিন্নতর কিছু। কিন্তু যুগলের শ্রেণীটা সম্পর্কে কোন সংশয় নেই: এটা সন্দেহাতীত এবং এর সংজ্ঞা দেয়া কঠিন নয়, অথচ ২ সংখ্যাটা, অন্য যে কোন অর্থে, একটা আধিবিদ্যক সত্তা যার সম্পর্কে আমরা কখনও নিশ্চিতভাবে অনুভব করতে পারি না যে, এটা অস্তিত্বশীল কিংবা আমরা এর কোন সন্ধান পেয়েছি। কাজেই, চিরকাল নিশ্চিতভাবে ভ্রমাত্মক থাকবে এমন একটা সমস্যা-উদ্রেককারী সংখ্যা ২-এর পিছনে ছোটার চেয়ে যার-সম্পর্কে আমরা নিশ্চিত সেই যুগলের শ্রেণীটা নিয়ে সন্তুষ্ট থাকাই অধিকতর বিচক্ষণতা হবে। সুতরাং আমরা নিম্নোক্ত সংজ্ঞা গঠন করছি :-

কোন শ্রেণীর সংখ্যা হচ্ছে শ্রেণীটির সদৃশ সকল শ্রেণীর শ্রেণী।

তদনুসারে, একটা যুগলের সংখ্যা হবে সকল যুগলের শ্রেণী। প্রকৃতপক্ষে, সকল যুগলের শ্রেণীটাই *হবে* ২ সংখ্যাটা, আমাদের সংজ্ঞা অনুসারে। সামান্য অস্বাচ্ছন্দ্যের বিনিময়ে, এই সংজ্ঞাটা নির্দিষ্টতা ও নিশ্চয়তা বিধান করে; এবং এটা প্রমাণ করা কঠিন নয় যে, সংখ্যার যেসব বৈশিষ্ট্য আমাদের কাঙ্ক্ষিত, এভাবে সংজ্ঞায়িত সংখ্যাগুলোর তেমন সকল বৈশিষ্ট্যই আছে।

যেসব গুচ্ছে সাদৃশ্যের ভিত্তিতে শ্রেণীসমূহের অন্তর্ভুক্তি ঘটে, তাদের যে-কোনটিকে আমরা এখন সর্বজনীনভাবে সংখ্যা হিসেবে সংজ্ঞায়িত করতে অগ্রসর হতে পারি। একটা সংখ্যা হবে এমন শ্রেণীসমূহের সেট যাদের যে-কোন দুইটি একে অন্যের সদৃশ, এবং সেটটির বাইরের কেউ সেটটির ভিতরের কারো সদৃশ নয়। অন্য কথায়, একটা সংখ্যা (সর্বজনীনভাবে) হচ্ছে কোন সংগ্রহ যা এর একটা সদস্যের সংখ্যা; অথবা আরও সরল ভাবে :

একটা সংখ্যা হচ্ছে এমন কিছু যা কোন শ্রেণীর সংখ্যা।

এ ধরনের একটা সংজ্ঞা বাচিক দিক থেকে চক্রক বলে প্রতীয়মান হলেও প্রকৃতপক্ষে তা নয়। সংখ্যার সর্বজনীন ধারণাটিকে ব্যবহার না করেই আমরা "একটা প্রদত্ত শ্রেণীর সংখ্যা"-কে সংজ্ঞায়িত করি; সুতরাং কোন যৌক্তিক ভ্রান্তির বশবর্তী না হয়েই আমরা "একটা প্রদত্ত শ্রেণীর সংখ্যা"-র ভিত্তিতে সর্বজনীনভাবে সংখ্যার সংজ্ঞা দিতে পারি।

এ ধরণের সংজ্ঞা প্রকৃতপক্ষে খুবই প্রচলিত। উদাহরণস্বরূপ, কারো পিতা হওয়া বলতে কী বোঝায়, প্রথমে তার সংজ্ঞা প্রদান করে পিতার শ্রেণীটাকে সংজ্ঞায়িত হতে হবে; তারপর পিতার শ্রেণীটা হবে তারা সবাই যারা কারো পিতা। অনুরূপভাবে যদি আমরা বর্গ সংখ্যার (ধরা যাক) সংজ্ঞা দিতে চাই, একটা সংখ্যা অন্য একটার বর্গ বলতে আমরা কী বুঝি, আমাদেরকে অবশ্যই প্রথমে তার সংজ্ঞা দিতে হবে, এবং তারপর বর্গ সংখ্যাকে সংজ্ঞায়িত করতে হবে সেই সব সংখ্যা হিসেবে যারা অন্যান্য সংখ্যার বর্গ। এই ধরনের পদ্ধতি বহুল প্রচলিত, এবং এটা অনুধাবন করা জরুরী যে, তা বৈধ এবং এমনকি প্রায়শই আবশ্যক।

আমরা এবার সংখ্যার একটা সংজ্ঞা প্রদান করলাম যা সসীম সংগ্রহের বেলায় কাজ করবে। অসীম সংগ্রহের বেলায় তা কিভাবে কাজ করবে সেটা দেখা বাকি থাকল। কিন্তু প্রথমে আমাদের অবশ্যই সিদ্ধান্ত নিতে হবে "সসীম" এবং "অসীম" বলতে আমরা কী বুঝি, বর্তমান অধ্যায়ের সীমিত পরিসরে যা করা সম্ভব নয়।

পরিভাষা

স্বাভাবিক সংখ্যা	natural numbers
স্থানান্তরযোগ্য	transitive
গুচ্ছ; বান্ডিল	bundle
ক্রম	order
ক্রম-সম্পর্ক	order relation
ক্রমানুসারী	ordered
ক্রমিক সংখ্যা	ordinal numbers
শ্রেণী	class
সেট	set
অজ্ঞেয়তাবাদী	agnostic
অভেদাত্মক	identical
অঙ্কবাচক সংখ্যা, সাধারণ সংখ্যা	cardinal numbers
অনন্য	unique
অবধারণ	judgment
অমূলদ সংখ্যা	irrational numbers
ধারাবাহিকতা	continuity
আধিবিদ্যক	metaphysical
আত্মবাচক, প্রতিফলনক্ষম	reflexive
অনিবার্যতা	necessity
পদ	term
প্রলক্ষণ	trait
প্রতিসম	symmetrical
পরিসর, পরিধি	range
উপসেট, সাবসেট	subset
বস্তু, বিষয়	object
বহুধা	manifold
বহুপত্নীক বিবাহ	polygamy
বহুভর্তৃক বিবাহ	polyandry
বহুত্ব	plurality
বাচনিক, শাব্দিক	verbal
এলাকা, গণ্ডী, রাজ্য	domain
যুগল	couple
যুক্তিবাক্য, প্রতিজ্ঞা	proposition
ত্রয়ী	trio
কূটাভাস	paradox
কাণ্ডজ্ঞান	common sense
সূত্র	formula
সম্বন্ধ	relation
সত্তা	entity; being
সত্তাসার	essence
সমষ্টি	aggregate
সমতুল, সমমান	equivalent
সংগ্রহ	collection

সাধারণ	common
গণনা	enumeration
গণনা করা	enumerate; count
চক্রক দোষ; চক্রকতা	circularity
জাত্যর্থ	intension
বিস্তৃতি	extension
বিপরীত	converse